

「温度」に関する疑問

●温度の概念で大気の熱現象をすべて解釈しようとする、いろいろと不思議に感じることもある。

疑問(1) **高い山を登ると上ほど寒くなる**という経験から知っているように、高度とともに大気が冷たいのはどうしてだろうか？

疑問(2) 高度10数kmぐらいを飛ぶ航空機では、**客室の空気は外気**を取り入れている。その外気は通常**低圧**で**低温**である。機内では地上付近と同じような空気にするために、その外気を**圧縮**し同時に空調をかける必要がある。空調は**暖房**それとも**冷房**のいずれを入れるのだろうか？

その答は「**冷房を入れる**」である。ではどうして冷房を入れるのだろうか？

●水蒸気を含まない地球大気(=乾燥大気) → 乾燥大気の状態方程式

●閉じた体積Vの中の大気の状態を考える。

「同じ数の分子を含む気体は、同圧・同温のもとでは同じ容積を占める」
(アボガドロの仮説)により、気体の状態方程式は、

$$pV = R^*T$$

と表される。ここで、1 kmol (キモル)の中の分子数は 6.022×10^{26} であり、
気体定数 $R^* = 8314.3 \text{ J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$ となる。

アボガドロの仮説を使えば、気体分子でありさえすれば、普遍的に成り立つ。

→地球大気の大部分は窒素、酸素、アルゴンなど乾燥大気からなる

→アボガドロの仮説を使うことによって、地球大気の混合気体の状態方程式

$$p = \rho R_d T \quad (1)$$

$\rho (\text{kg m}^{-3})$:乾燥大気の密度、乾燥大気の気体定数 $R_d = 287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ 。

熱力学の第2法則(エネルギーの式)

- ・質量も摩擦もない自由に動きうるピストンでふたをされた仮想的な容器内の気体を考える。 S :面積、 x :距離
- ・図a: 容器内の温度を T 、気圧を p とすると、外側と内側からは同じ圧力が働いていて動かないとする。
- ・図b: 閉じた系の容器に ΔQ の熱を加える。 Δ :微小量。
その熱は温度を増加させる(ΔT)分と体積を増加させる($\Delta V = S \Delta x$)
仕事として使われる。

$$\Delta Q = p \Delta V + C_v \Delta T \quad (2)$$

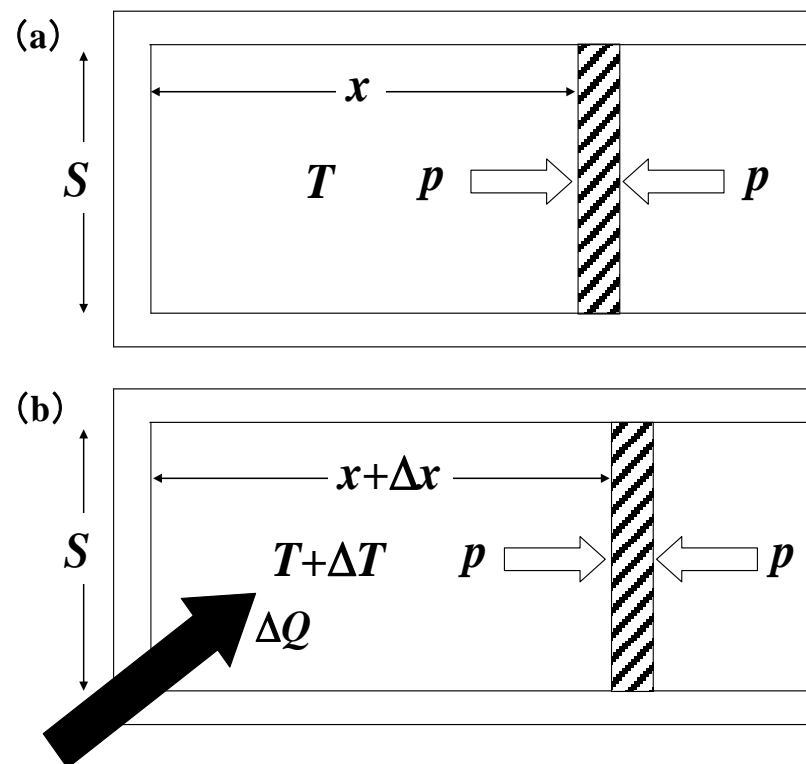
C_v : 定容比熱(定数) = $717 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$

- ・乾燥大気の状態方程式を用いて、

$$\Delta Q = -V \Delta p + C_p \Delta T \quad (3)$$

C_p : 定圧比熱(定数) = $1004 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$

$C_p = C_v + R_d$



・乾燥大気の状態の変化を考える場合、熱 ΔQ を加えない過程(断熱過程)のもとで大気の塊(空気塊)の状態の変化を見ることが多い。

$$\Delta Q = p \Delta V + C_v \Delta T \Rightarrow 0 \quad (2)$$

$$\Delta Q = -V \Delta p + C_p \Delta T \Rightarrow 0 \quad (3)$$

・断熱過程では、気圧が一定の条件では、(2)から気体が膨張する($\Delta V > 0$)と温度が下がり($\Delta T < 0$)、同様に体積が一定の条件では、(3)から気圧が下がる($\Delta p < 0$)と温度が下がる($\Delta T < 0$)ことになる。

・疑問(1):「上空に行くほど冷たくなるのはどうしてか？」

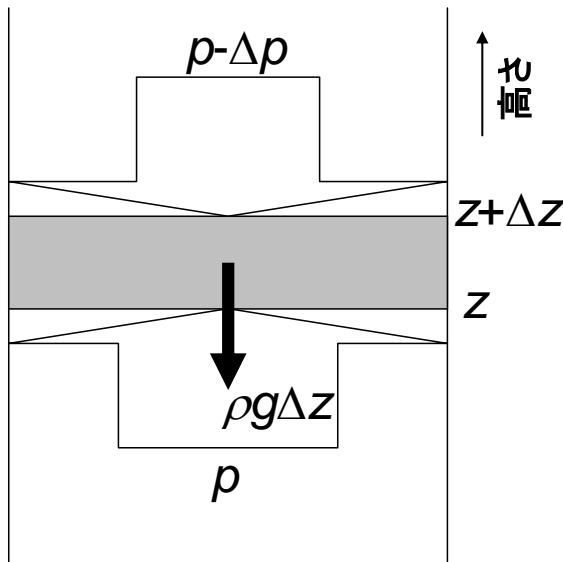
→ 乾燥大気の空気塊を断熱的に高く持ち上げると、気圧は下がり(体積が膨張する)ために、温度は下がるからである。

→ 大気は圧縮性を持つために温度変化するので、温度は保存しない。

→ 地球大気の大きな特性。

- ・質量を持つ地球大気には地球の引力が働く。
- ・大気も質量を持つので、地球の引力が下向きに働く。ところが、鉛直方向は成層しているように見える。引力にカウンターする力はいったい何だろうか？
- ・鉛直方向の気圧分布は上層ほど小さい。
 - 鉛直方向の気圧傾度力は下から上に向いて働く。
 - この力が引力に対するカウンターの力。

$$-\Delta p = \rho g \Delta z \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (4) \quad : \text{静水圧平衡の式.}$$



図の説明； 鉛直方向の Δz の厚さの空気塊（薄い影の付いた部分）に働く重力 $\rho g \Delta z$ と気圧傾度力 $-\Delta p$.

右の式： 微小量 Δ を微分量 d で表現したもの。密度の鉛直分布が分かると、地上からある高度まで積分することによって、その高度における気圧が分かる。

乾燥断熱減率の導入と温位の定義

- ・乾燥大気の**空気塊**を上空に持ち上げる場合の温度の下がり方:
- ・断熱を仮定

$$g\Delta z + C_p\Delta T = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\Delta T}{\Delta z} = \frac{g}{C_p} \equiv \Gamma_d \quad (5)$$

Γ_d : **乾燥断熱減率** (定数) = 約 0.01 K m^{-1} .

→ **乾燥大気**では1 km上昇させると**空気塊**の温度は約 10 K 下がる.

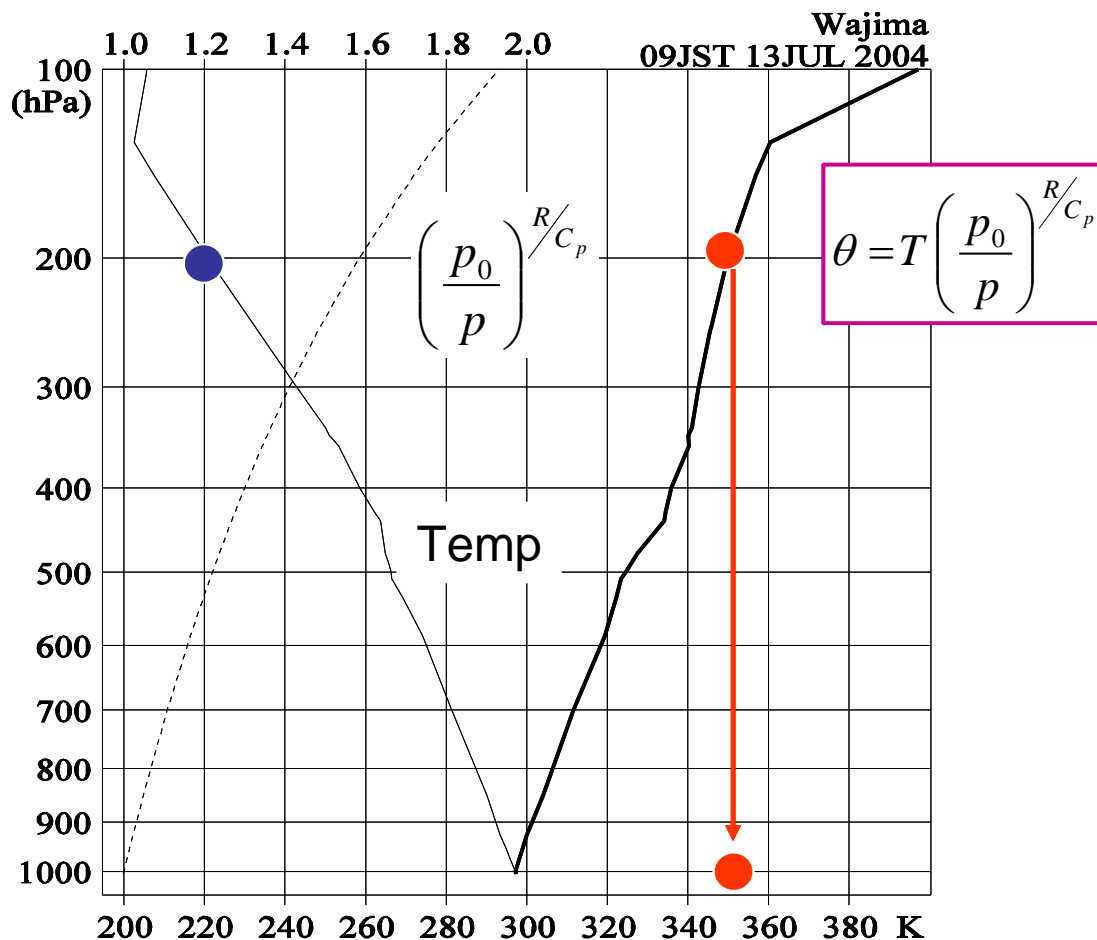
断熱+(3)+(4) から

$$-\frac{R_d T}{p} dp + C_p dT = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \equiv T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_d}{C_p}} \quad (6)$$

θ : **温位**. p_0 : 基準気圧 (通常 1,000 hPa). 温度と同じ次元を持つ物理量. **断熱保存量**.

- ・物理的意味: **断熱**の仮定のもとで、ある高度における気圧 p と温度 T を持つ**空気塊**を**基準気圧面まで持ってきたときの温度**。

温度と温位の鉛直分布



2004年7月13日9時の石川県・輪島での高層観測による温度(細い実線)、**温位**(太い実線)の鉛直分布。破線は**温位**の気圧に関するファクターであり、そのスケールは上部に
いれてある。(豪雨・豪雪の気象学より)

- ・孤立した物体の運動では、その座標 (x, y, z) は時間 t だけの関数としてその位置 (座標) を追いかける。
- ・流体は連続体であるから、座標はむしろ固定して流体の運動をみる方が都合良い。

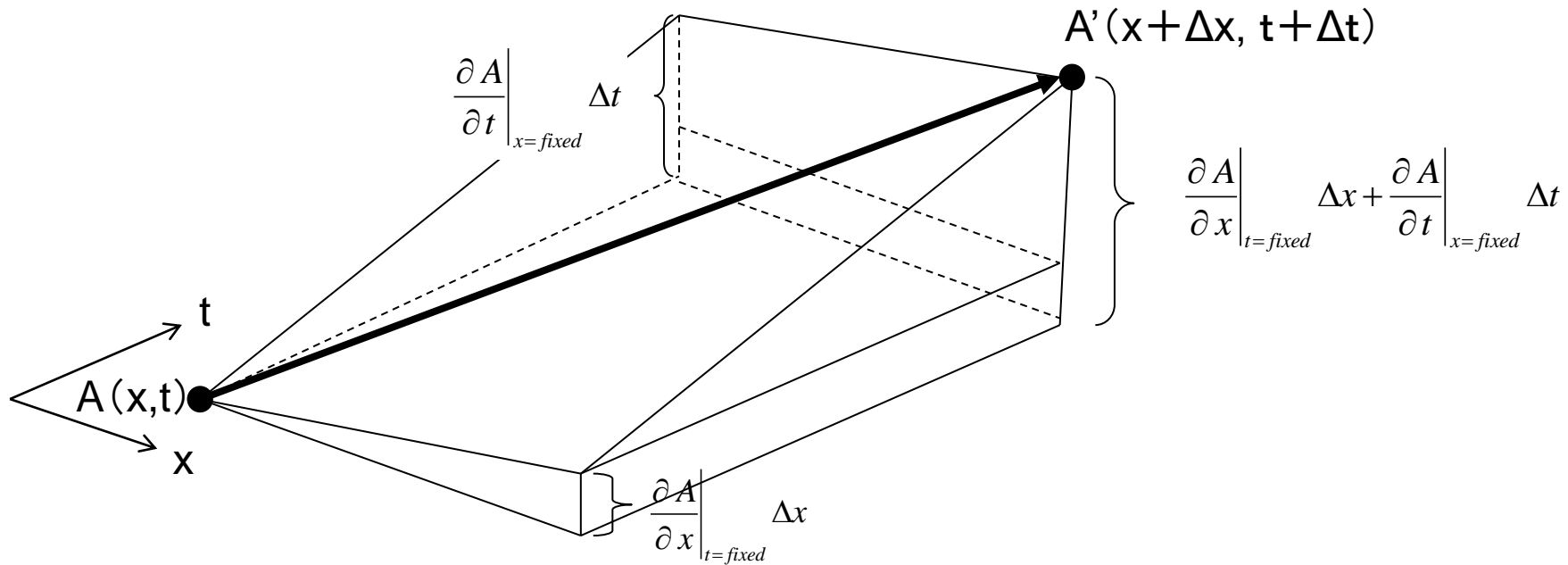
{ 動きによって記述する場合 ラグランジ的見方
 固定したポイントで記述する場合 オイラー的見方

- ・**ラグランジ**的見方では位置の情報は時間だけの関数であり、空間の座標を (x, y, z) とすると、 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ という関係になる。
- ・**オイラー**的見方では時間と位置は独立のパラメータであり、その運動を表すのに**多パラメータ**となる。

多パラメータの表記の仕方を簡単に述べる。

簡単のために、2パラメータの (t, x) 空間における物理量について述べる。

2パラメータにおける物理量の表記



$$A'(x + \Delta x, t + \Delta t) \approx A(x, t) + \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{t=fixed} \Delta x + \left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{x=fixed} \Delta t + \dots$$

例; $\left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{t=fixed}$ はx方向の傾きを意味する。t方向は固定して行う。

- ・一般ルール: 固定するパラメータは書かないので、省略。
- ・多パラメータの微分を偏微分、ラウンドd(∂)で表す。
1パラメータの微分を全微分、dで表す。

移流項の導入

$A(t)$ を $A(t, x(t), y(t), z(t))$ という座標で書くと、

$$\frac{dA}{dt} \equiv \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial A}{\partial z}$$

と変形される。式の左辺をラグランジアン微分、右辺をオイリアン微分と呼ぶ。

$$\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{dz}{dt} = w \quad \text{から、}$$

$$\frac{dA}{dt} \equiv \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} + w \frac{\partial A}{\partial z}$$

と書くことができる。

オイラー的見方では、時間変化項と3方向の空間変化に関する項からなる。
空間変化の項は(一)移流項と呼ばれる。

移流項の役割

$$\frac{dA}{dt} = f_A \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} + w \frac{\partial A}{\partial z} = f_A$$

f_A をAの生成項とする。

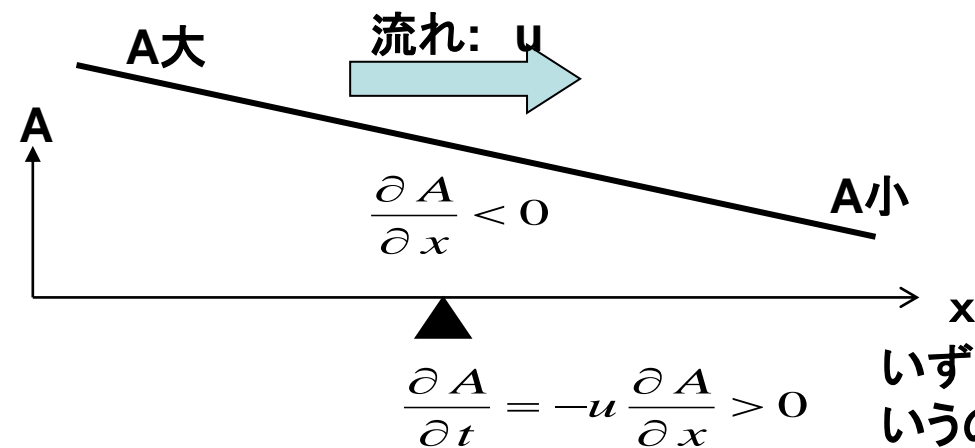
$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} = -u \frac{\partial A}{\partial x} - v \frac{\partial A}{\partial y} - w \frac{\partial A}{\partial z} + f_A$$

・**移流項**は、流れがあってAがその方向に傾きを持つと、固定した点におけるAは時間変化する。

・右辺第一項の役割だけを見る。

例：Aを温度として、西側では暖かく東側で冷たいとする。また西風が全体で吹いている($u > 0$)状況を考える(図)。

$$\frac{\partial A}{\partial x} < 0 \quad u > 0$$



いずれ自分の所も暖かい空気に覆われるだろうというのは実際と一致する。

こういう効果をもたらすのが、**移流項**である。

運動方程式の物理的意味

$$\frac{d u}{d t} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{気圧傾度力}} + \underbrace{f v + f_x}_{\text{コリオリ項}} \quad (11)$$

気圧傾度力 コリオリ項

$$\frac{d v}{d t} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{気圧傾度力}} - \underbrace{f u + f_y}_{\text{コリオリ項}} \quad (12)$$

気圧傾度力 コリオリ項

$$\frac{d w}{d t} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}}_{\text{気圧傾度力}} - \underbrace{g + f_z}_{\text{重力項}} \quad (13)$$

気圧傾度力 重力項

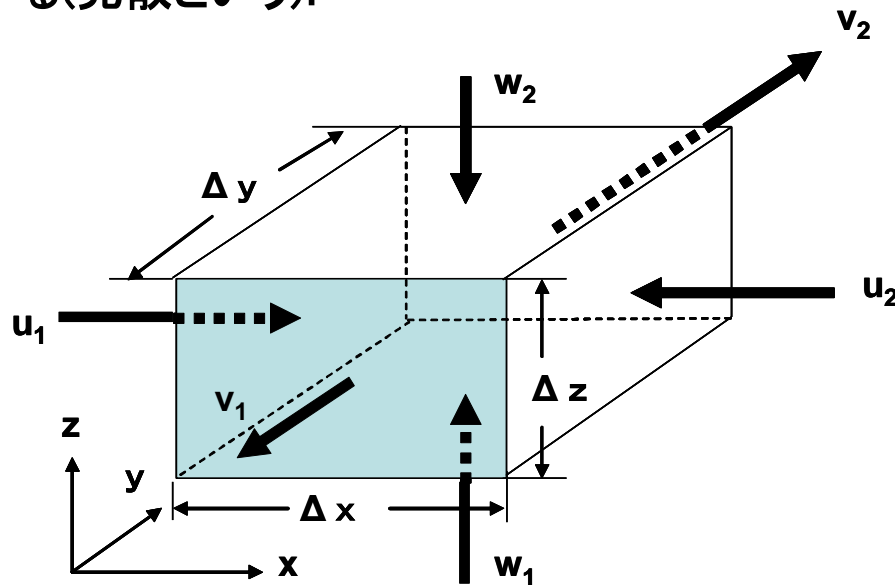
●連続の式 or 質量の保存式

・微小な直方体(各辺 Δx 、 Δy 、 Δz)を考える。

・方向を x 、 y 、 z とするとその方向の流れを u 、 v 、 w とする(図)。

例: x 方向の流れの正負を $u_2 < 0$ 、 $u_1 > 0$ と与える。→ $u_2 - u_1 < 0$

→ x 方向の流れはその領域に集まる(収束という)。 y 方向では流れは広がる(発散という)。



$$\frac{u_2 - u_1}{\Delta x} \approx \frac{\partial u}{\partial x} < 0, \quad \frac{v_2 - v_1}{\Delta y} \approx \frac{\partial v}{\partial y} > 0, \quad \frac{w_2 - w_1}{\Delta z} \approx \frac{\partial w}{\partial z} < 0.$$

$$D \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

発散の式

- ・Dが正であれば**発散**であり、負であれば**収束**となる。
- ・流れの**収束・発散**があると、大気の質量は変わらないから、直方体の中の密度は時間変化しなければならない。

$$\longrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (14)$$

大気や海洋の場合、左辺と右辺を比べると、一般に密度変化が小さいということから、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \approx 0$$

この場合、もしも、水平方向の**収束**が正(**発散**が負)の場合、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} < 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} > 0$$

大気の場合、地表ではwは0であるので、大気下層ではw>0となり、上昇流であることになる。こうした状況では実際雲が発生することが多く天気は悪くなることを意味する。別に鉛直流の正負まで見なくても水平風の空間的変動からわかる場合がある。

デカルト系における乾燥大気の支配方程式

15

7変数($u, v, w, p, T, \rho, \theta$) \rightarrow 7つの式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x \quad (1)$$

x方向に働く力=移流項+コリオリ力+圧力傾度力+その他の力

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y \quad (2)$$

y方向に働く力=移流項+コリオリ力+圧力傾度力+その他の力

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + f_z \quad (3)$$

z方向に働く力=移流項+圧力傾度力+重力+その他の力

デカルト系における乾燥大気の支配方程式

16

7変数($u, v, w, p, T, \rho, \theta$) \rightarrow 7つの式

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4)$$

連続の式

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{C_p T} Q \quad (5)$$

熱の式

$$p = \rho R T \quad (6)$$

気体の状態方程式

$$\theta = T \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{R/C_p} \quad (7)$$

温位の定義